نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

گروه آموزشی : **رياضي**

تاریخ : **۱۳۹۱/۸/۲۴**

وقت : **۷۰** دقیقه

دانشکده رياضي

امتحان میان ترم درس : **رياضي۱-فني (۱۶ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۲**- ۱۳۹۱

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ - معادله $1+z^2+z^4+z^6=z+z^3+z^5$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ - بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده هوپیتال ، حدهای زیر را محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

الف) $l_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ ب) $l_2=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x}{[x]}\right]$

سوال ۳ - تابع $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

نشان دهید مقدار $f'(0)$ موجود است و تابع $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته است. **۱۵ نمره**

سوال ۴ - نشان دهید که تابع $f(x)=(x-1)^5+x^5+(x+1)^5$ دقیقا یک ریشه دارد. **۱۵ نمره**

سوال ۵ - در یک مثلث قائم الزاویه ، مجموع طول وتر و یک ضلع زاویه قائمه برابر ۳ متر است.

حداکثر مساحت مثلث چقدر است ؟ **۱۵ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضي۱-فني (۱۶گروه هماهنگ)
نیمسال اول ۹۲-۱۳۹۱

جواب سوال۱ : معادله را صورت $1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6=0$ نوشته و سپس طرفین معادله را در $(1+z)$ ضرب می‌کنیم : $(1+z)(1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6)=0$

داریم $1+z^7=0$ و یا $z^7=-1$. اکنون می نویسیم $z^7=e^{(2k\pi+\pi)i}\ ,\ k\in Z$. و در نتیجه $z_k=e^{(2k+1)\frac{\pi}{7}i}\ ,\ k\in Z$ جوابهای معادله $z^7=-1$ هستند. اما ۶ جواب معادله اصلی عبارتند از : $z_0=e^{\frac{\pi}{7}i}\ ,\ z_1=e^{\frac{3\pi}{7}i}\ ,z_2=e^{\frac{5\pi}{7}i}\ ,z_{-1}=e^{\frac{-\pi}{7}i}\ ,z_{-2}=e^{\frac{-3\pi}{7}i}\ ,z_{-3}=e^{\frac{-5\pi}{7}i}$

جواب سوال۲ : الف) قرار می‌دهیم :

$$l_1=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x})^2\frac{1}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}=2(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2\times 1}=\frac{1}{4}$$

ب) روش اول : فرض کنیم $x>2$ بنابر این $[x]\le x<[x]+1$ در نتیجه $1\le\frac{x}{[x]}<1+\frac{1}{[x]}<1+1=2$

پس اگر $x>2$ آنگاه $\left[\frac{x}{[x]}\right]=1$ و در نتیجه $l_2=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{[x]}\right]=1$

روش دوم : (قضیه فشردگی) دیدیم که اگر $x>2$ آنگاه $1\le\frac{x}{[x]}<1+\frac{1}{[x]}$ و یا $[1]\le\left[\frac{x}{[x]}\right]\le\left[1+\frac{1}{[x]}\right]$

اکنون داریم $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{[x]}\right]=1$ و $\lim_{x\to\infty}[1]=1$ بنابر این $l_2=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{[x]}\right]=1$

جواب سوال۳ : به کمک تعریف مشتق مقدار $f'(0)$ را محاسبه می کنیم. $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

(یادآوری : اگر تابع $g(x)$ در یک همسایگی a کراندار باشد و $\lim_{x\to a}f(x)=0$ آنگاه $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$)

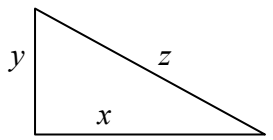
داریم : $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ و همچنین داریم $\lim_{x\to 0}[3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}]=0$

بنابر این $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته است.

جواب سوال٤ : الف) از تابع $f(x)=(x-1)^5+x^5+(x+1)^5$ مشتق می گیریم. $f'(x)=5(x-1)^4+5x^4+5(x+1)^4$

به ازای هر عدد حقیقی x داریم $f'(x)>0$ بنابر این تابع f صعودی اکید و در نتیجه یک به یک است یعنی می‌تواند حداکثر یک ریشه داشته باشد. چون $f(x)=5x^5+20x^4+15x$ به سادگی دیده می شود که $x=0$ یک ریشه تابع است پس تابع f دقیقا یک ریشه دارد.

به کمک قضیه مقدار میانی هم می‌توان وجود حداقل یک ریشه را ثابت کرد زیرا $f(1)=33$ و $f(-1)=-33$ و $f(1)f(-1)<0$ چون پیوسته است پس حداقل یک ریشه در بازه $[-1,1]$ وجود دارد و نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.



جواب سوال۵ : در مثلث قائم‌الزاویه مقابل داریم $x^2+y^2=z^2$ و $y+z=3$ و $S=\frac{1}{2}xy$

$z=3-y\ \to\ x^2+y^2=(3-y)^2\ \to x^2=9-6y$

$$\to y=\frac{9-x^2}{6}\ \to S=\frac{1}{12}x(9-x^2)\to S'=\frac{1}{4}(3-x^2)\ \to\ S'=0\to x=\sqrt{3}\ ,\ y=1\ ,z=2\ ,\ MaxS=\frac{\sqrt{3}}{2}m^2$$

سیدرضا موسوي